

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

**STEFANŮV PROBLÉM VEDENÍ TEPLA S FÁZOVOU
PŘEMĚNOU A JEHO ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ**

A STEFAN PROBLEM OF HEAT CONDUCTION WITH PHASE CHANGE AND ITS EXACT SOLUTION

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

René Kesler

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Lubomír Klimeš, Ph.D.

BRNO 2017

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky
Student: **René Kesler**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Matematické inženýrství
Vedoucí práce: **Ing. Lubomír Klimeš, Ph.D.**
Akademický rok: 2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Stefanův problém vedení tepla s fázovou přeměnou a jeho analytické řešení

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Problematika vedení tepla s fázovou přeměnou je uplatňována v řadě technických aplikací. Obecně jsou Stefanovy problémy řešitelné především pouze numericky, avšak ve specifických případech lze nalézt a odvodit i analytické (přesné) řešení.

Cíle bakalářské práce:

Cílem práce je provést rešerši v oblasti Stefanova problému s fázovou přeměnou a vytvořit přehled (odvození) analytických řešení pro různé typy počátečních úloh. Součástí práce je i implementace odvozených řešení ve vhodném programovacím prostředí (MATLAB, Maple, Mathematica apod.), vizualizace řešení a interpretace výsledků.

Seznam doporučené literatury:

HAHN, David W. a M. Necati ÖZİŞIK. Heat conduction. 3rd ed. Hoboken: Wiley, 2012. ISBN 978-0470902936.

STEFANESCU, Doru. Science and engineering of casting solidification. 2nd ed. New York: Springer, 2009. ISBN 978-144-1945-099.

INCROPERA, Frank P., David P. DEWITT, Theodore L. BERGMAN a Adrienne S. LAVINE. Principles of heat and mass transfer. 7th ed. Singapore: John Wiley, 2013. ISBN 978-0-470-64615-1.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá analytickým řešením úloh vedení tepla s fázovou přeměnou, které jsou nazvány jako klasický Stefanův problém. Nejprve je odvozena diferenciální rovnice vedení tepla a také je vytvořen matematický model Stefanova problému. Největší pozornost je následně věnována odvozování analytických řešení pro úlohy, u nichž lze tato řešení nalézt. K implementaci získaných řešení ve vhodném programovacím prostředí bylo zvoleno prostředí MATLAB. Práce také obsahuje popis vytvořeného programu a grafického rozhraní v MATLABu. Programem byly následně vyřešeny zvolené počáteční úlohy.

Summary

This bachelor's thesis deals with analytical solutions of heat conduction problems with phase change which are known as classical Stefan problems. At the beginning a differential equation of heat conduction is derived and a mathematical model of Stefan problem is formed. The greatest attention is paid to the derivation of analytical solutions for cases in which these solutions are obtainable. The MATLAB environment was chosen for implementation of the obtained solutions. The thesis also includes a description of the program and its graphical interface in MATLAB. The applicability of the program is demonstrated in several phase change problems.

Klíčová slova

Stefanův problém, vedení tepla, fázová přeměna, tání, tuhnutí, analytické řešení

Keywords

Stefan problem, heat conduction, phase change, melting, solidification, analytical solution

KESLER, R. *Stefanův problém vedení tepla s fázovou přeměnou a jeho analytické řešení*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 49 s. Vedoucí Ing. Lubomír Klimeš, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci *Stefanův problém vedení tepla s fázovou přeměnou a jeho analytické řešení* vypracoval samostatně pod vedením Ing. Lubomíra Klimeše, Ph.D. a s využitím odborných materiálů uvedených v seznamu použitých zdrojů na konci práce.

V Brně dne

.....

René Kesler

Tímto bych chtěl poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce Ing. Lubomíru Klimešovi, Ph.D. za vedení a cenné rady, tipy a nápady, kterými pomohl ke zlepšení grafické i obsahové stránky práce.

Také bych rád poděkoval své rodině za jejich trpělivost a podporu při studiu.

René Kesler

Obsah

Úvod	11
1 Přenos tepla	13
1.1 Přenos tepla vedením	13
1.1.1 Tepelný tok	13
1.1.2 Fourierův zákon	13
1.1.3 Zákon zachování energie	14
1.1.4 Odvození diferenciální rovnice vedení tepla	14
2 Formulace Stefanova problému	19
2.1 Matematická formulace	20
2.1.1 Tuhnutí	20
2.1.2 Tání	21
3 Analytická řešení	23
3.1 Tání pevné fáze o teplotě tání	23
3.2 Tuhnutí podchlazené kapaliny	27
3.3 Tání	30
3.4 Tuhnutí v cylindrických souřadnicích	32
4 Vytvořený program a grafická řešení	39
4.1 Uživatelské rozhraní	39
4.2 Grafické řešení	41
4.2.1 Řešení v kartézských souřadnicích	41
4.2.2 Řešení v cylindrických souřadnicích	43
4.2.3 Transcendentní rovnice	44
5 Závěr	45
Seznam použitých zdrojů	47
Seznam použitých veličin, symbolů a zkratk	49

Úvod

Problém vedení tepla zahrnující tání nebo tuhnutí se nazývá po Jožefu Stefanovi, což byl slovinský fyzik, matematik a básník pracující na Vídeňské univerzitě. Na konci 19. století ve své práci formuloval problém rozložení teploty a postup ledu při tuhnutí vody o objemu ve tvaru desky. Dále se problém nesoucí jeho jméno rozšiřoval o mnohem komplexnější jevy a postupně, jak rostlo pole jeho aplikací, tak vzrůstal také zájem o jeho výzkum, a to především z matematického hlediska [2].

Stefanův problém je proces, který je nám všem nejspíše velice dobře znám, a tak si intuitivně můžeme představit, jak by asi rozložení teploty v tělese při daných podmínkách mohlo vypadat. V každodenním životě se setkáváme například s mražením nebo naopak rozmrazováním potravin, výrobou ledu nebo táním vosku při hoření svíčky. Ovšem znalost přesného řešení nabývá důležitosti v mnoha technických aplikacích, kde jsme s touto znalostí schopni použít technologické postupy zdokonalovat. Jednou z takových aplikací je například odlévání oceli a slitin, kde dochází k tuhnutí materiálu. Další důležitou aplikací je uchovávání energie, jež je v materiálu uložena ve formě latentního tepla [3]. Principem je akumulace energie (například ze slunečního záření během dne), kterou materiál spotřebuje během tání a tím ji v sobě uchová. Následně, když je tato energie potřeba (během noci může sloužit k ohřevu vzduchu), se může zpětně uvolnit při tuhnutí.

Řešení problému nabývá složitosti především díky rozhraní mezi tuhou a kapalnou fází, které se pohybuje v důsledku absorpce nebo uvolňování latentního tepla, a tak je jeho poloha neznámou, jež se musí vyšetřit v rámci řešení.

Při sestavování matematického modelu je důležité porozumění fyzikálním procesům doprovázející daný jev. Vznikají také zásadní otázky, co je nezbytně nutné uvažovat, a naopak co se může zanedbat. V této práci se bude hledat analytické řešení Stefanova problému, což, jak se později ukáže, je značně omezující. Vyšetřování bude probíhat pouze pro zjednodušené případy splňující pouze jednoduché počáteční a okrajové podmínky.

1 Přenos tepla

Přenos tepla obecně probíhá třemi způsoby [9]

- **Vedením (kondukcí):** Kinetická energie molekul se předává vzájemnými srážkami při jejich neuspořádaném pohybu. Vedení převládá v pevných látkách a také tekutinách bez proudění.
- **Prouděním (konvekcí):** Při nuceném nebo přirozeném proudění se přemístěním molekul přenáší i tepelná energie. Konvekce převládá v tekutinách.
- **Zářením (sáláním):** Probíhá ve formě elektromagnetického vlnění v určitém rozsahu vlnových délek. Nositeli tepelné energie jsou v tomto případě fotony.

V této práci bude uvažován pouze přenos tepla vedením.

1.1 Přenos tepla vedením

Na začátek, než bude formulován samotný Stefanův problém, je vhodné si odvodit diferenciální rovnici vedení tepla. A jelikož analytické řešení lze obvykle najít jen pro 1D případ, bude odvozena pouze rovnice v jedné dimenzi.

K procesu odvozování bude zapotřebí základních veličin a vztahů z termomechaniky pro přenos tepla vedením, které budou v této kapitole uvedeny.

Pro vytvoření této úvodní části bylo čerpáno především z [8] a [6].

1.1.1 Tepelný tok

Vzniknou-li v tělese teplotní rozdíly, začne teplo podle druhého zákona termodynamiky přecházet z míst s vyšší teplotou do míst s teplotou nižší. Je tedy nutno znát teploty na různých místech tělesa, nebo-li teplotní pole, což je množina teplot v tělese. Pokud se jedná o nestacionární pole, pak se teplota nemění pouze v prostoru, ale také v čase a tato pole jsou v jedné dimenzi definována funkcí $T = T(x, t)$.

Množství tepla transportované za jednotku času se nazývá tepelný tok \dot{Q} [W]. Tepelný tok procházející plochou o jednotkové velikosti, která stojí kolmo ke směru toku, se označuje jako měrný tepelný tok \dot{q} [W · m⁻²] a platí

$$d\dot{Q} = \dot{q} dS. \quad (1.1)$$

1.1.2 Fourierův zákon

Měrný tepelný tok \dot{q} v látce je přímo úměrný teplotnímu gradientu

$$\dot{q} = -k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (1.2)$$

kde k je součinitel tepelné vodivosti, což je fyzikální vlastnost daného materiálu, která udává jaký odpor klade látka proti přenosu tepla. Rozměrem součinitele k je [W · m⁻¹ · K⁻¹].

1.1. PŘENOS TEPLA VEDENÍM

U všech látek je součinitel k závislý na teplotě, ale u plynů a kapalin je navíc také funkcí tlaku. Ovšem změny v závislosti na teplotě a tlaku jsou dostatečně malé, a proto ke zjednodušení výpočtů bude dále uvažován součinitel tepelné vodivosti konstantní pro jednotlivé fáze látky. Nejvyšší tepelnou vodivostí disponují pevné látky, u kterých se k pohybuje v řádu stovek (např. pro měď $k = 403 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$), naopak nejnižší mají plyny, to jest v řádu setin až desetin (např. pro vzduch $k = 0,025 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$).

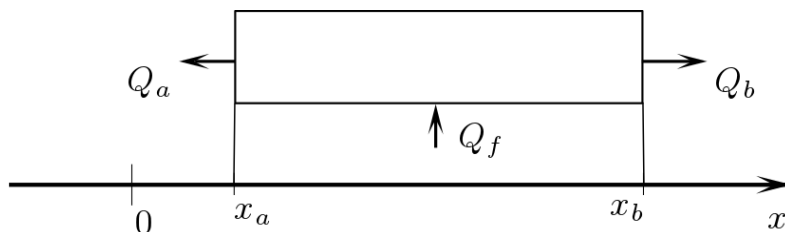
Ve vztahu (1.2) je záporné znaménko, protože teplo teče vždy proti teplotnímu gradientu a součinitel k je kladný.

1.1.3 Zákon zachování energie

Nebudeme-li uvažovat ztráty do okolí, můžeme napsat tepelnou bilanci

$$\Delta E = Q_f - Q_a - Q_b, \quad (1.3)$$

což nám udává, že změna vnitřní energie ΔE úseku mezi x_a a x_b během časového intervalu (t_α, t_β) se rovná teplu Q_f dodaného do úseku známými zdroji a zmenšené o tepla Q_a a Q_b , která vytečou přes konce x_a a x_b .



Obrázek 1.1: Energetická bilance pro tyč [6]

1.1.4 Odvození diferenciální rovnice vedení tepla

Rozložení teploty budeme vyšetřovat pouze pro případ v jedné dimenzi, proto si zkoumaný objekt můžeme představit jako dlouhou tenkou tyč. Problém si popíšeme pomocí dvou souřadnic. První souřadnice x zvolená podél tyče nám popíše polohu bodu v tyči a druhá, označená jako t , nám určí čas. Hledanou neznámou je funkce $T = T(x, t)$, jež popisuje teplotu v bodě x a čase t . Pro potřeby odvozování v jedné dimenzi si představíme veličiny platící v jedné prostorové dimenzi, aby odpovídaly jednotky: tepelný tok \dot{q}^* [W] a součinitel vedení tepla průřezu k^* [$\text{W} \cdot \text{m} \cdot \text{K}^{-1}$] [6].

Při odvozování bylo čerpáno především z [6].

Vyjádření veličin pomocí hustot

Nejprve si vyjádříme veličiny z rovnice (1.3) pro tepelnou bilanci pomocí integrálů ve formě jejich hustot.

Na pravé straně máme jako první Q_f , což je množství tepla dodané známými zdroji, nebo které v tyči vznikne. My si ho vyjádříme pomocí tzv. hustoty vnitřních zdrojů $f(x, t)$ [$\text{W} \cdot \text{m}^{-1}$]

$$Q_f = \int_{t_\alpha}^{t_\beta} \left(\int_{x_a}^{x_b} f(x, t) dx \right) dt. \quad (1.4)$$

Dále si z pravé strany vezmeme celý člen $(Q_a + Q_b)$, který nám určí celkové množství tepla, jež vyteče z daného úseku tyče. Tento člen si vyjádříme pomocí měrného tepelného toku $\dot{q}^*(x, t)$

$$Q_a + Q_b = \int_{t_\alpha}^{t_\beta} \left(\int_{x_a}^{x_b} \frac{\partial \dot{q}^*}{\partial x}(x, t) dx \right) dt. \quad (1.5)$$

Nakonec na levé straně vystupuje člen ΔE , což je přírůstek vnitřní energie tedy její rozdíl v časovém intervalu od t_α do t_β . Přírůstek můžeme vyjádřit pomocí hustoty vnitřní energie $e^*(x, t)$ [$\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$]

$$\Delta E = \int_{x_a}^{x_b} \left(\int_{t_\alpha}^{t_\beta} \frac{\partial e^*}{\partial t}(x, t) dt \right) dx. \quad (1.6)$$

Ještě než dosadíme do rovnice tepelné bilance, všimněme si, že tepelný tok \dot{q}^* i vnitřní energie e^* jsou funkcí teploty T . Zatímco tepelný tok je možné si popsat již zmíněným Fourierovým zákonem pomocí vztahu (1.2), závislost vnitřní energie je třeba ještě vyšetřit. Jestliže nebudeme uvažovat změny skupenství a s využitím druhé formy prvního termodynamického zákona za konstantního tlaku, je totální změna energie rovna změně entalpie v čase a závislost můžeme zapsat ve tvaru [2]

$$de^* = \rho^* c_p dT, \quad (1.7)$$

kde c_p [$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$] je měrná tepelná kapacita za konstantního tlaku, která udává množství tepla potřebné ke zvýšení teploty jednoho kilogramu materiálu o 1°C . Dále budeme místo c_p psát pouze c . A ρ^* zde uvažujeme jako délkovou hustotu s rozměrem [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$].

Diferenciální rovnice

Nyní dané veličiny dosadíme do vztahu (1.3) a všechny zapíšeme do jednoho integrálu

$$\int_{x_a}^{x_b} \left(\int_{t_\alpha}^{t_\beta} \left(\frac{\partial e^*}{\partial t} + \frac{\partial \dot{q}^*}{\partial x} - f \right) dt \right) dx = 0. \quad (1.8)$$

V dalším kroku bychom chtěli přejít z integrální rovnosti na rovnost bodovou, což nám umožní následující lemma.

LEMMA 1.1 [6] Necht f je spojitá veličina v okolí bodu x^* . Potom platí

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x^*, r)|} \int_{B(x^*, r)} f(x) dx = f(x^*). \quad (1.9)$$

Předchozí integrální rovnost je pro jakýkoli úsek tyče a časový interval, proto rovnost vydělíme výrazem $(x_b - x_a)(t_\beta - t_\alpha)$, přejdeme k limitám $(x_b - x_a) \rightarrow 0$ a $(t_\beta - t_\alpha) \rightarrow 0$. Dvakrát využijeme Lemma 1.1, čímž dostaneme bodovou rovnost

$$\frac{\partial e^*}{\partial t} + \frac{\partial \dot{q}^*}{\partial x} - f = 0. \quad (1.10)$$

1.1. PŘENOS TEPLA VEDENÍM

Za $\frac{\partial e^*}{\partial t}$ dosadíme z (1.7), za \dot{q}^* dosadíme z Fourierova zákona (1.2) a obdržíme

$$\rho^* c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-k^* \frac{\partial T}{\partial x} \right) - f = 0. \quad (1.11)$$

V našem případě uvažujeme homogenní tyč, a tak je součinitel k^* nezávislý na souřadnici x a rovnici napíšeme ve tvaru

$$\rho^* c \frac{\partial T}{\partial t} = k^* \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f, \quad (1.12)$$

neboli zjednodušeným zápisem

$$T_t = \kappa T_{xx} + f^*, \quad (1.13)$$

kde

$$\kappa = k^* / (\rho^* c) \quad (1.14)$$

je nově zavedená veličina, známá jako součinitel teplotní vodivosti, a $f^* = f / (\rho c)$. Dostali jsme parciální diferenciální rovnici druhého řádu, jejíž kvadratická forma $Q(x, t) = x^2$ je semidefinitní, a proto je rovnice parabolická.

Otázka existence řešení

Aby byla námi hledaná funkce $T(x, t)$ řešením dané rovnice, musí být *funkcí třídy* C^2 na oblasti Ω . Symbolem $C^k(\Omega)$ se rozumí množina všech funkcí, které mají na oblasti Ω spojitě parciální derivace až do řádu k včetně [6]. Jelikož naše rovnice je druhého řádu, musí pro hledanou funkci existovat odpovídající spojitě derivace. Pro případ, kterým se budeme primárně zabývat, bude oblast Ω rovna kartézskému součinu $(x, t) \in \langle 0, \infty \rangle \times \langle 0, \infty \rangle$.

Dále budeme uvažovat, že všechna data úlohy, tzn. koeficienty rovnice, pravá strana rovnice i funkce v podmínkách, jsou analytické funkce.

V případě, že daná úloha má řešení, toto řešení je jednoznačné a je spojitě závislé na datech (malá změna dat vyvolá pouze malou změnu řešení), řekneme, že úloha je dobře formulována (je korektní) [6].

Aby byla úloha dobře formulována, musíme k parciální diferenciální rovnici (1.13) ještě dodat [2]

- počáteční podmínku $T(x, 0) = T_i(x)$, pro $x \in \Omega$,
- okrajové podmínky v každém bodě okraje oblasti $\partial\Omega$, pro $t > 0$.

Pro požadované okrajové podmínky uvedeme tři základní typy, které uvažujeme na koncích tyče:

- **Dirichletova podmínka** nám udává konkrétní hodnotu teploty na konci tyče, teplota může být konstantní, nebo závislá na čase

$$T(0, t) = T_0(t), \quad \text{pro } t > 0. \quad (1.15)$$

- **Neumannova podmínka** udává hodnotu tepelného toku na konci tyče

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = \dot{q}(t), \quad \text{pro } t > 0. \quad (1.16)$$

- **Newtonova podmínka** udává kombinaci předchozích podmínek

$$\alpha_0 \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) + \beta_0 T(0, t) = g_0(t), \quad \text{pro } t > 0. \quad (1.17)$$

Uvedené podmínky jsou uvažovány pro konec $x = 0$.

2 Formulace Stefanova problému

Klasický Stefanův problém se zaměřuje na popis rozložení teploty v homogenní látce podstupující fázovou změnu. Samotný termín fáze není pouze ve smyslu skupenství, ale má obecnější význam, jelikož látka se může za různých teplot a tlaků vyskytovat v jednom skupenství, ale v různých fázích, které se liší třeba krystalovou stavbou, jako například grafit a diamant. My se v této práci zaměříme na změnu skupenství, a to konkrétně na tání a tuhnutí, což ovšem neznamená, že využitě principy a získané výsledky se nedají použít i v jiných případech.

Tuhé i kapalně skupenství mají společné, že jednotlivé atomy látky drží ve vzájemné blízkosti vnitřní síly. Zatímco v pevném skupenství jsou tyto síly dostatečně velké a molekuly se pohybují pouze v blízkosti svých rovnovážných pozic, u kapalin jsou síly podstatně menší a molekuly mohou přeskakovat mezi jednotlivými pozicemi. Energie pohybujících se molekul je interpretována jako teplo nebo tepelná energie měřitelná jako teplota látky. Atomy v kapalině mají tedy více této energie než daná látka ve fázi pevné. *Latentní teplo* L je potom množství energie, které musíme dodat pevné látce o teplotě tání T_m , aby překonala síly mezi atomy udržující její strukturu. Naopak při tuhnutí kapaliny se latentní teplo musí odvádět [2].

Čisté látky, jako například voda, mají diskrétní teplotu tání T_m a fázová přeměna tedy probíhá při konstantní teplotě, kdežto u některých směsí a slitin probíhá fázová změna na určitém teplotním intervalu. My budeme uvažovat pouze případ, kdy má látka diskrétní teplotu tání, protože potom máme jasně definované pohybující se rozhraní mezi tuhým a kapalným skupenstvím [7].

Tabulka 2.1: Probíhající fyzikální děje a uvažované předpoklady [2]

Fyzikální děje probíhající při fázové změně	Zjednodušující předpoklady
Přenos tepla probíhá vedením, prouděním a zářením s možnými dalšími vlivy.	Přenos tepla probíhá pouze vedením.
Uvolňování nebo absorpce latentního tepla.	Konstantní latentní teplo.
Teplotní interval změny skupenství.	Teplota tání/tuhnutí je konstantní a známá vlastnost materiálu.
Tloušťka a struktura rozhraní mezi tuhým a kapalným skupenstvím.	Ostré rozhraní s nulovou tloušťkou na teplotě tání/tuhnutí.
Povrchové napětí a vliv zakřivení rozhraní.	Nevýznamný vliv, proto zanedbáváme.
Závislost termofyzikálních vlastností na teplotě a tlaku.	Předpokládáme konstantní vlastnosti pro každou fázi.

2.1. MATEMATICKÁ FORMULACE

V předchozí tabulce byly ještě shrnuty fyzikální děje probíhající při fázové změně a popřípadě zjednodušující předpoklady.

2.1 Matematická formulace

Nejprve si zformulujeme úlohu pro tuhnutí a následně také pro tání. Jak jsme si již uvedli, budeme uvažovat pouze případ jednodimenzionálních problémů.

2.1.1 Tuhnutí

Uvažujme tedy kapalinu, která má na v čase $t = 0$ počáteční teplotu T_i vyšší než teplota tuhnutí látky T_m . Mějme tuto kapalinu definovanou na intervalu $x \in \langle 0; \infty \rangle$. Na začátku děje je náhle teplota okraje $x = 0$ snížena na hodnotu T_0 , která je nižší než teplota tuhnutí T_m a dále je na této teplotě udržován po celou dobu $t > 0$, což nám představuje Dirichletovu podmínku, která je konstantní v čase. Můžeme si tedy představit, že tuhnutí započne právě na okraji $x = 0$ a dále se bude rozhraní $s(t)$ mezi fázemi pohybovat v kladném směru osy x [7].

Jednotlivé teploty $T_s(x, t)$ pro tuhé skupenství a $T_l(x, t)$ pro skupenství kapalné jsou popsány parabolickými rovnicemi (1.13) odvozené v první kapitole [2]

$$\frac{\partial T_s(x, t)}{\partial t} = \kappa_s \frac{\partial^2 T_s(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{pro } 0 < x < s(t), \quad t > 0, \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial T_l(x, t)}{\partial t} = \kappa_l \frac{\partial^2 T_l(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{pro } s(t) < x < \infty, \quad t > 0. \quad (2.1b)$$

K rovnicím musíme dodat počáteční podmínku

$$T_l(x, 0) = T_i, \quad x > 0 \quad (2.2)$$

a podmínky okrajové

$$T_s(0, t) = T_0, \quad t > 0, \quad (2.3a)$$

$$T_l(x \rightarrow \infty, t) \rightarrow T_i, \quad t > 0. \quad (2.3b)$$

Ale protože máme dvě rovnice, úloha ještě není dobře formulována. Potřebujeme navíc ještě pro každou rovnici jednu okrajovou podmínku na rozhraní fází. Změna skupenství probíhá na konstantní teplotě T_m , dodáme tedy podmínku na rozhraní, která zastoupí obě potřebné okrajové podmínky a zároveň zajistí spojitost řešení [7]

$$T_s(x = s(t), t) = T_m = T_l(x = s(t), t), \quad t > 0 \quad (2.4)$$

Úlohu parciálních diferenciálních rovnic již máme dobře formulovánu, ovšem problém ještě vyřešit nedokážeme, protože máme pouze dvě rovnice a celkově tři neznámé: $T_s(x, t)$, $T_l(x, t)$, $s(t)$, kde $s(t)$ je rozhraní pohybující se v čase. Další potřebnou rovnici získáme vyšetřením energetické bilance na rozhraní $x = s(t)$. Vezmeme tedy tepelný tok z kapalné fáze v záporném smyslu osy x zvětšený o teplo uvolňované při tuhnutí a ten se musí

2. FORMULACE STEFANOVA PROBLÉMU

v izolované tyči rovnat tepelnému toku vstupujícího do pevné fáze v záporném směru osy x . Tento vztah můžeme vyjádřit pomocí Fourierova zákona jako [7]

$$k_l \frac{\partial T_l}{\partial x} + \rho L \frac{ds(t)}{dt} = k_s \frac{\partial T_s}{\partial x}, \quad (2.5)$$

neboli

$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial x} - k_l \frac{\partial T_l}{\partial x} = \rho L \frac{ds(t)}{dt} \quad \text{pro } x = s(t), \quad t > 0, \quad (2.6)$$

kde L je latentní teplo vztažené na jednotku hmotnosti [$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$]. Hustota ρ bude uvažována konstantní pro obě skupenství $\rho_l = \rho_s = \rho$.

Nyní již máme dobře formulovanou a řešitelnou úlohu. Rovnice (2.1a), (2.1b) a (2.6) nám dávají tři diferenciální rovnice pro řešení neznámých $T_s(x, t)$, $T_l(x, t)$ a $s(t)$. A máme taky všechny potřebné počáteční a okrajové podmínky.

2.1.2 Tání

Nyní si rozebereme případ, kdy máme na počátku látku v tuhé fázi, tedy v čase $t = 0$ má počáteční teplotu T_i nižší než je teplota tání T_m . Problém řešíme zase na intervalu $x \in \langle 0; \infty \rangle$. Na počátku je tentokrát teplota na konci $x = 0$ zvýšena a udržována na hodnotě T_0 vyšší než T_m .

Rozložení teplot máme nyní popsané rovnicemi [2]

$$\frac{\partial T_l(x, t)}{\partial t} = \kappa_l \frac{\partial^2 T_l(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{pro } 0 < x < s(t), \quad t > 0, \quad (2.7a)$$

$$\frac{\partial T_s(x, t)}{\partial t} = \kappa_s \frac{\partial^2 T_s(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{pro } s(t) < x < \infty, \quad t > 0. \quad (2.7b)$$

Počáteční podmínka

$$T_s(x, 0) = T_i, \quad x > 0 \quad (2.8)$$

a okrajové podmínky

$$T_l(0, t) = T_0, \quad t > 0, \quad (2.9a)$$

$$T_s(x \rightarrow \infty, t) \rightarrow T_i, \quad t > 0. \quad (2.9b)$$

$$T_l(x = s(t), t) = T_m = T_s(x = s(t), t), \quad t > 0 \quad (2.9c)$$

Okrajová podmínka (2.9c) je v tomto případě stejná jako v případě tuhnutí (2.4). Nyní ještě vyšetříme energetickou bilanci na rozhraní $x = s(t)$. Tepelný tok z kapalně fáze v kladném směru osy x , který je zmenšený o teplo spotřebovávané na fázovou přeměnu (tání), se musí rovnat v izolované tyči tepelnému toku vstupujícího do tuhé fáze ve směru osy x . Matematicky bilanci zapíšeme jako [7]

$$-k_l \frac{\partial T_l}{\partial x} - \rho L \frac{ds(t)}{dt} = -k_s \frac{\partial T_s}{\partial x}, \quad (2.10)$$

což můžeme přepsat na tvar

$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial x} - k_l \frac{\partial T_l}{\partial x} = \rho L \frac{ds(t)}{dt} \quad \text{pro } x = s(t), \quad t > 0 \quad (2.11)$$

všimněme si, že rovnice má stejný tvar jako v případě tuhnutí (2.6).

3 Analytická řešení

Obecně jsou problémy s fázovou přeměnou řešitelné především numericky, nicméně v některých zjednodušených případech splňujících určitá omezení je možné nalézt analytické řešení. Jedná se hlavně o jednodimenzionální případy na nekonečném nebo polonekonečném intervalu s jednoduchými počátečními a okrajovými podmínkami jako například konstantní počáteční teplota T_i na celém intervalu x a konstantní předepsaná teplota T_0 na konci tyče $x = 0$ [2], což je Dirichletova okrajová podmínka (1.15). Budeme také předpokládat konstantní termofyzikální vlastnosti pro každou fázi, jak jsme již zmínili v tabulce 2.1 a hustotu stejnou pro obě fáze. Dále problém musí připouštět tzv. *similarity solution* [4], což znamená, že musí existovat transformace, která sdružuje dvě nezávislé proměnné x, t do jedné proměnné.

3.1 Tání pevné fáze o teplotě tání

Nejprve si ukážeme nejjednodušší případ, kdy máme pouze tzv. *jednofázový problém*, což znamená, že i když se látka vyskytuje ve dvou fázích, my budeme vyšetřovat teplotu jen v jedné, protože pro tuhou fázi je teplota během celého děje konstantní a nám známá [7].

Uvažujme tání látky, která je v tuhé fázi při teplotě tání T_m a je definována na polo-
přímce $x > 0$. V čase $t = 0$ je konec $x = 0$ zahřát na teplotu T_0 , jež je větší než T_m a na této teplotě je konec udržován pro $t > 0$. Tání tedy začne na konci $x = 0$ a rozhraní mezi tuhú a kapalnou fází se začne pohybovat v kladném směru osy x , souřadnici rozhraní si označíme jako $s(t)$. Zatímco teplota T_l kapalné fáze pro $0 < x < s(t)$ je neznámá, teplota T_s tuhé fáze pro $s(t) < x < \infty$ je všude konstantní rovna T_m , a proto je problém označován jako *jednofázový*.

Budeme tedy hledat neznámé T_l a $s(t)$.

Matematická formulace

Mějme rovnice pro rozložení teplot

$$\frac{\partial T_l(x, t)}{\partial t} = \kappa_l \frac{\partial^2 T_l(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{pro } 0 < x < s(t), \quad t > 0, \quad (3.1a)$$

$$T_s = T_m \quad \text{pro } s(t) < x < \infty, \quad t > 0. \quad (3.1b)$$

S počáteční podmínkou

$$T_s(x, 0) = T_m \quad (3.2)$$

a okrajovou podmínkou

$$T_l(0, t) = T_0. \quad (3.3)$$

Dále určíme podmínky na rozhraní $x = s(t)$

$$T_l(x, t) = T_m = T_s, \quad (3.4a)$$

$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial x} - k_l \frac{\partial T_l}{\partial x} = \rho L \frac{ds(t)}{dt}. \quad (3.4b)$$

3.1. TÁNÍ PEVNÉ FÁZE O TEPLITĚ TÁNÍ

Všimněme si, že T_s je konstantní, tedy člen $k_s \frac{\partial T_s}{\partial x}$ je nulový a podmínku (3.4b) lze zjednodušit na tvar

$$-k_l \frac{\partial T_l}{\partial x} = \rho L \frac{ds(t)}{dt}. \quad (3.5)$$

Řešení

Nejprve vyřešíme parabolickou rovnici (3.1a). Předpokládejme, že existuje transformace $(x, t) \mapsto \xi(x, t)$. Řešení rovnice hledáme ve tvaru

$$T_l(x, t) = F(\xi(x, t)), \quad (3.6)$$

kde $F(\xi(x, t))$ je neznámá funkce třídy C^2 a ξ je podle [2] $\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$. Vypočteme si parciální derivace funkce F tak, abychom mohli dosadit do (3.1a).

$$\frac{\partial F}{\partial t} = F' \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{1}{2} F' \frac{x}{\sqrt{t^3}} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F' \frac{\partial \xi}{\partial x} = F' \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = F'' \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + F' \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = F'' \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 = F'' \frac{1}{t} \quad (3.9)$$

Nyní můžeme funkci $F(\xi(x, t))$ dosadit do rovnice (3.1a)

$$-\frac{1}{2} F' \frac{x}{\sqrt{t^3}} = \kappa_l F'' \frac{1}{t}, \quad (3.10)$$

rovnici vynásobíme t a vydělíme κ_l , kde $\kappa_l > 0$ a dostaneme

$$F'' + F' \frac{x}{2\kappa_l \sqrt{t}} = 0, \quad (3.11)$$

za $\frac{x}{\sqrt{t}}$ můžeme dosadit ξ

$$F'' + F' \frac{1}{2\kappa_l} \xi = 0. \quad (3.12)$$

Převodli jsme tak parciální diferenciální rovnici na obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu, kterou už můžeme vyřešit. Substitucí

$$F'(\xi) = y(\xi) \quad (3.13)$$

si ještě rovnici zjednodušíme na obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu.

$$y' = -y \frac{1}{2\kappa_l} \xi \quad (3.14)$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{2\kappa_l} \xi, \quad y \neq 0 \quad (3.15)$$

Rovnici zintegrujeme

$$\ln |y| = -\frac{1}{4\kappa_l} \xi^2 + \ln |C_1| \quad (3.16)$$

$$\frac{y}{C_1} = e^{-\frac{1}{4\kappa_l} \xi^2} \quad (3.17)$$

$$y = C_1 e^{-\frac{1}{4\kappa_l} \xi^2}, \quad C_1 \neq 0. \quad (3.18)$$

Řešení dosadíme zpět do substituce (3.13)

$$F'(\xi) = C_1 e^{-\eta^2}, \quad (3.19)$$

v rovnici máme novou proměnnou $\eta = \frac{\xi}{2\sqrt{\kappa_l}} = \frac{x}{2\sqrt{\kappa_l t}}$. Následným zintegrováním rovnice získáme

$$F(\eta) = C_1 \int e^{-\eta^2} d\eta. \quad (3.20)$$

Protože rovnici řešíme pouze pro $0 < x < s(t)$, budeme integrovat pouze od 0 do konečné hodnoty η

$$\int_0^\eta F'(z) dz = C_1 \int_0^\eta e^{-z^2} dz, \quad (3.21)$$

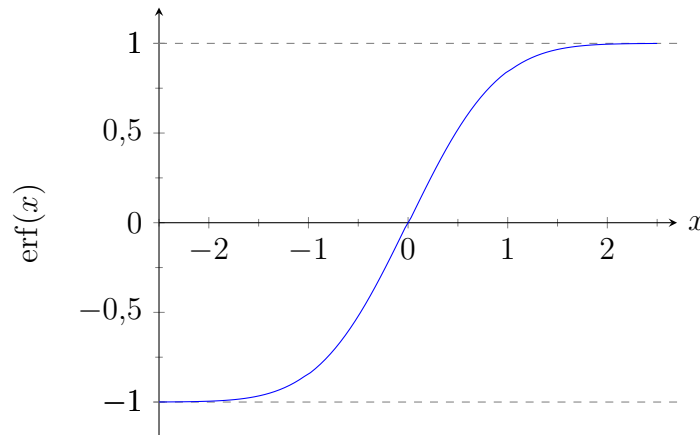
$$F(\eta) - F(0) = C_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(\eta), \quad (3.22)$$

kde $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ je pouze konstanta, proto ji můžeme zahrnout do konstanty C_1

$$F(\eta) = F(0) + C_1 \operatorname{erf}(\eta), \quad C_1 \neq 0, \quad (3.23)$$

kde $\operatorname{erf}(\eta)$ je tzv. *error function*, nebo-li Gaussova chybová funkce, která je podle [1] definována jako

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (3.24)$$



Obrázek 3.1: Error function

Vyšetříme člen $F(0)$, tedy $\eta = 0 \rightarrow \xi = 0 \rightarrow x = 0$ a pomocí okrajové podmínky (3.3) dostaneme

$$F(0) = T_l(0, t) = T_0 \quad (3.25)$$

3.1. TÁNÍ PEVNÉ FÁZE O TEPLITĚ TÁNÍ

Našli jsme tedy řešení rovnice (3.1a) ve tvaru

$$T_l(x, t) = T_0 + A \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_l t}} \right). \quad (3.26)$$

A je v rovnici konstanta, kterou si dopočítáme pomocí podmínek. Když dosadíme okrajovou podmínku (3.3), dostaneme $T_l(0, t) = T_0$, protože pro chybovou funkci platí $\operatorname{erf}(0) = 0$ [1] a zjišťujeme, že podmínka je splněna. Rovnice ještě musí splňovat podmínky na rozhraní $x = s(t)$, nejprve využijeme podmínku (3.4a)

$$T_0 + A \operatorname{erf} \left(\frac{s(t)}{2\sqrt{\kappa_l t}} \right) = T_m. \quad (3.27)$$

Z rovnice plyne, že člen $\frac{s(t)}{2\sqrt{\kappa_l t}}$ bude konstantní, protože T_0 , A i T_m jsou konstanty. Zvolíme [7]

$$\lambda = \frac{s(t)}{2\sqrt{\kappa_l t}} \quad \text{nebo} \quad s(t) = 2\lambda\sqrt{\kappa_l t} \quad (3.28)$$

a konstantu A si vyjádříme jako

$$A = \frac{T_m - T_0}{\operatorname{erf}(\lambda)}. \quad (3.29)$$

Získáme řešení ve tvaru

$$T_l(x, t) = T_0 + \frac{T_m - T_0}{\operatorname{erf}(\lambda)} \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_l t}} \right). \quad (3.30)$$

Konečně ještě využijeme podmínku (3.5), abychom získali vztah pro parametr λ . Nejprve si spočteme derivace vyskytující se ve vztahu (3.5), využijeme přitom další vlastnosti Gaussovy chybové funkce [1]

$$\frac{d \operatorname{erf}(x)}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}. \quad (3.31)$$

Hledané derivace jsou potom ve tvaru

$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{\lambda\sqrt{\kappa_l}}{\sqrt{t}}, \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial T_l(x, t)}{\partial x} = \frac{T_m - T_0}{\operatorname{erf}(\lambda)} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_l t}}\right)^2} \frac{1}{2\sqrt{\kappa_l t}} \right). \quad (3.33)$$

Dosadíme tedy do podmínky (3.5) pro $x = s(t)$

$$-k_l \frac{T_m - T_0}{\operatorname{erf}(\lambda)} \frac{e^{-\lambda^2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\kappa_l t}} = \rho L \frac{\lambda\sqrt{\kappa_l}}{\sqrt{t}}, \quad (3.34)$$

úpravami získáme

$$\frac{k_l(T_0 - T_m)}{\rho L \sqrt{\pi \kappa_l}} = \operatorname{erf}(\lambda) e^{\lambda^2} \lambda, \quad (3.35)$$

za κ_l dosadíme podle (1.14) a obdržíme výsledný tvar

$$\frac{c_l(T_0 - T_m)}{L\sqrt{\pi}} = \operatorname{erf}(\lambda)e^{\lambda^2}\lambda. \quad (3.36)$$

Výsledná rovnice je tzv. *transcendentní rovnice*, což znamená, že neznámá λ nelze explicitně vyjádřit. K výpočtu využijeme některou z numerických metod například metodu bisekce nebo metodu tečen [5]. Jakmile získáme kořen $\lambda > 0$, můžeme dopočítat souřadnici rozhraní $s(t)$ z rovnice (3.28) a také samotnou teplotu $T_l(x, t)$ z (3.30).

3.2 Tuhnutí podchlazené kapaliny

Další z tzv. *jednofázových problémů* je tuhnutí podchlazené kapaliny, což je kapalina, která má teplotu nižší než je teplota tuhnutí T_m , při níž se látka obvykle nachází již v tuhém skupenství [2]. Toho lze docílit za určitých podmínek při velmi pomalém chlazení látky. Její stav je označován jako termodynamicky metastabilní [2]. Když látka dosáhne své kritické teploty, začne rychle tuhnout.

Máme podchlazenou kapalinu při počáteční teplotě T_i nižší než teplota tuhnutí T_m . V čase $t = 0$ začne kapalina náhle tuhnout na konci $x = 0$ a rozhraní se pohybuje v kladném směru osy x . Teplota tuhé fáze se ustálí na teplotě tuhnutí T_m , protože jí neprochází žádný tepelný tok. Teplo, které se uvolní při tuhnutí, vstupuje do míst s nižší teplotou, tedy do kapaliny, rozložení teploty proto řešíme pouze v kapalině.

Matematická formulace

Mějme rovnice pro rozložení teplot

$$T_s = T_m \quad \text{pro} \quad 0 \leq x < s(t), \quad t > 0, \quad (3.37a)$$

$$\frac{\partial T_l(x, t)}{\partial t} = \kappa_l \frac{\partial^2 T_l(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{pro} \quad s(t) < x < \infty, \quad t > 0, \quad (3.37b)$$

s počáteční podmínkou

$$T_l(x, 0) = T_i \quad (3.38)$$

a okrajovou podmínkou

$$T_l(x \rightarrow \infty, t) \rightarrow T_i. \quad (3.39)$$

Dále mějme podmínky na rozhraní $x = s(t)$, kde podmínku (2.6) upravíme pro $\frac{\partial T_s}{\partial x} = 0$

$$T_s = T_m = T_l(x, t) \quad (3.40a)$$

$$-k_l \frac{\partial T_l}{\partial x} = \rho L \frac{ds(t)}{dt} \quad (3.40b)$$

3.2. TUHNUTÍ PODCHLAZENÉ KAPALINY

Řešení

Hledáme řešení parabolické rovnice (3.37b). Postup řešení bude až do kroku (3.20) stejný jako v předchozím příkladu. Mějte tedy

$$F(\eta) = C_1 \int e^{-\eta^2} d\eta \quad (3.41)$$

nyní řešíme rovnici pro interval $s(t) < x < \infty$, proto budeme integrovat od η do ∞

$$\int_{\eta}^{\infty} F(z) dz = C_1 \int_{\eta}^{\infty} e^{-z^2} dz \quad (3.42)$$

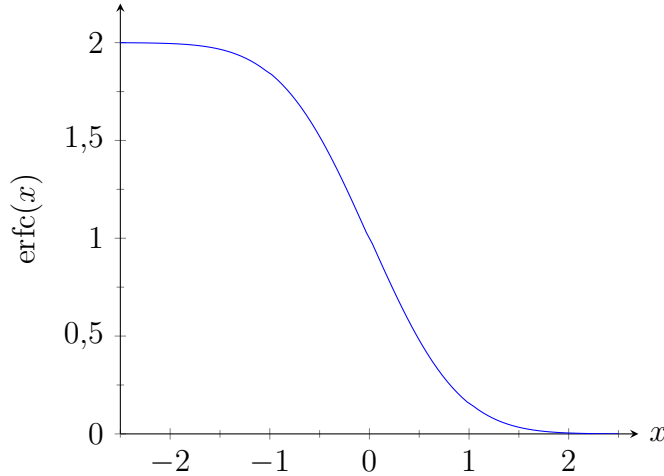
$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} (F(\eta)) - F(\eta) = C_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}(\eta), \quad (3.43)$$

nebo-li

$$F(\eta) = C_1 \operatorname{erfc}(\eta) + \lim_{\eta \rightarrow \infty} (F(\eta)), \quad C_1 \neq 0, \quad (3.44)$$

kde $\operatorname{erfc}(\eta)$ je doplňková Gaussova chybová funkce definována jako [1]

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt = 1 - \operatorname{erf}(x). \quad (3.45)$$



Obrázek 3.2: Doplnková Gaussova chybová funkce

Vyjádříme si člen $\lim_{\eta \rightarrow \infty} (F(\eta))$, pro který platí $\eta \rightarrow \infty$ a tedy $\xi \rightarrow \infty$, což může platit pro $x \rightarrow \infty$ nebo $t \rightarrow 0$. Nakonec z podmínek (3.38) a (3.39) určíme

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} (F(\eta)) = T_l(x, 0) = T_l(x \rightarrow \infty, t) = T_i \quad (3.46)$$

Nalezli jsme řešení rovnice (3.37b) ve tvaru

$$T_l(x, t) = T_i + A \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_l t}} \right), \quad (3.47)$$

která splňuje okrajovou a počáteční podmínku.

Pro výpočet konstanty A využijeme podmínku (3.40a) na rozhraní $x = s(t)$

$$T_m = T_i + A \operatorname{erfc} \left(\frac{s(t)}{2\sqrt{\kappa_l t}} \right). \quad (3.48)$$

Všechny členy rovnice jsou konstantní, proto bude i $\frac{s(t)}{2\sqrt{\kappa_l t}}$ konstantní a zavedeme si parametr [7]

$$\lambda = \frac{s(t)}{2\sqrt{\kappa_l t}} \quad \text{nebo} \quad s(t) = 2\lambda\sqrt{\kappa_l t}. \quad (3.49)$$

Konstantu A si nyní můžeme vyjádřit ve tvaru

$$A = \frac{T_m - T_i}{\operatorname{erfc}(\lambda)}. \quad (3.50)$$

Řešení máme ve tvaru

$$T_l(x, t) = T_i + \frac{T_m - T_i}{\operatorname{erfc}(\lambda)} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_l t}} \right). \quad (3.51)$$

Využijeme podmínku (3.40b), abychom mohli dosadit využijeme vztahu [1]

$$\frac{d \operatorname{erfc}(x)}{dx} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}. \quad (3.52)$$

Spočteme si ještě derivace objevující se v (3.40b)

$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{\lambda\sqrt{\kappa_l}}{\sqrt{t}}, \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial T_l(x, t)}{\partial x} = \frac{T_m - T_i}{\operatorname{erfc}(\lambda)} \left(-\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_l t}}\right)^2} \frac{1}{2\sqrt{\kappa_l t}} \right). \quad (3.54)$$

Po dosazení do (3.40b) pro $x = s(t)$ dostaneme

$$k_l \frac{T_m - T_i}{\operatorname{erfc}(\lambda)} \frac{e^{-\lambda^2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\kappa_l t}} = \rho L \frac{\lambda\sqrt{\kappa_l}}{\sqrt{t}}. \quad (3.55)$$

Úpravami a dosazením $\kappa_l = \frac{k_l}{\rho c_l}$ získáme zjednodušený tvar

$$\frac{c_l(T_m - T_i)}{L\sqrt{\pi}} = \operatorname{erfc}(\lambda) e^{\lambda^2} \lambda. \quad (3.56)$$

Konečně získáním kořene $\lambda > 0$ transcendentní rovnice zvolenou numerickou metodou můžeme určit pozici rozhraní $s(t)$ a také teplotu $T_l(x, t)$ kapaliny.

3.3. TÁNÍ

3.3 Tání

Nyní uvažujme případ tání polonekonečné tyče, kde již musíme vyšetřit teploty pro tuhé i kapalné skupenství. Látka je původně v tuhé fázi při počáteční teplotě T_i , která je nižší než teplota tání látky T_m pro $x > 0$. V čase $t = 0$ je náhle konec $x = 0$ zahřátý na teplotu T_0 větší než T_m a dále je pro $t > 0$ na této teplotě udržován. Tání tedy začne na konci $x = 0$ a rozhraní mezi kapalnou a tuhou fází se bude v čase pohybovat v kladném směru osy x . Jako neznámé máme teploty v obou fázích $T_l(x, t)$, $T_s(x, t)$ a pozici rozhraní $s(t)$.

Matematická formulace

Rovnice pro rozložení teplot

$$\frac{\partial T_l(x, t)}{\partial t} = \kappa_l \frac{\partial^2 T_l(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{pro } 0 < x < s(t), \quad t > 0, \quad (3.57a)$$

$$\frac{\partial T_s(x, t)}{\partial t} = \kappa_s \frac{\partial^2 T_s(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{pro } s(t) < x < \infty, \quad t > 0, \quad (3.57b)$$

s počáteční podmínkou

$$T_s(x, 0) = T_i \quad \text{pro } x > 0 \quad (3.58)$$

a okrajovými podmínkami

$$T_l(0, t) = T_0 \quad (3.59a)$$

$$T_s(x \rightarrow \infty, t) \rightarrow T_i. \quad (3.59b)$$

Dodáme podmínky na rozhraní $x = s(t)$

$$T_l(x, t) = T_m = T_s(x, t) \quad \text{pro } x = s(t) \quad (3.60a)$$

$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial x} - k_l \frac{\partial T_l}{\partial x} = \rho L \frac{ds(t)}{dt} \quad (3.60b)$$

Řešení

Řešení pro kapalnou fázi z rovnice (3.57a) máme získané ve tvaru (3.26) odvozeného v podkapitole 3.1

$$T_l(x, t) = T_0 + A \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_l t}} \right), \quad (3.61)$$

rovnice také splňuje podmínku (3.59a). Řešení pro tuhou fázi z rovnice (3.57b) máme získané ve tvaru (3.47) odvozeného v podkapitole 3.2

$$T_s(x, t) = T_i + B \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_s t}} \right), \quad (3.62)$$

splňující okrajovou podmínku (3.59b) a také počáteční (3.58). Zatím neznámé konstanty A a B se nyní pokusíme vyšetřit pomocí podmínek na rozhraní $s(t)$.

Nejprve využijeme podmínku (3.60a), do níž dosadíme

$$T_0 + A \operatorname{erf} \left(\frac{s(t)}{2\sqrt{\kappa_l t}} \right) = T_m = T_i + B \operatorname{erfc} \left(\frac{s(t)}{2\sqrt{\kappa_s t}} \right), \quad (3.63)$$

z rovnice je vidět, že členy $\frac{s(t)}{2\sqrt{\kappa_l t}}$ a $\frac{s(t)}{2\sqrt{\kappa_s t}}$ musí být konstantní, proto si za ně zvolíme parametr

$$\lambda = \frac{s(t)}{2\sqrt{\kappa_l t}} \quad \text{nebo} \quad s(t) = 2\lambda\sqrt{\kappa_l t} \quad (3.64)$$

a předchozí rovnici máme ve tvaru

$$T_0 + A \operatorname{erf}(\lambda) = T_m = T_i + B \operatorname{erfc} \left(\lambda \sqrt{\frac{\kappa_l}{\kappa_s}} \right). \quad (3.65)$$

Z rovnice si můžeme postupně určit hledané konstanty A a B

$$A = \frac{T_m - T_0}{\operatorname{erf}(\lambda)} \quad (3.66a)$$

$$B = \frac{T_m - T_i}{\operatorname{erfc} \left(\lambda \sqrt{\frac{\kappa_l}{\kappa_s}} \right)}. \quad (3.66b)$$

Získali jsme řešení ve tvaru

$$T_l(x, t) = T_0 + \frac{T_m - T_0}{\operatorname{erf}(\lambda)} \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_l t}} \right) \quad (3.67)$$

$$T_s(x, t) = T_i + \frac{T_m - T_i}{\operatorname{erfc} \left(\lambda \sqrt{\frac{\kappa_l}{\kappa_s}} \right)} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_s t}} \right) \quad (3.68)$$

Ovšem ještě máme stále neznámý parametr λ , který určíme z podmínky (3.60b). Nejprve si určíme potřebné derivace vyskytující se v daném vztahu

$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{\lambda\sqrt{\kappa_l}}{\sqrt{t}} \quad (3.69a)$$

$$\frac{\partial T_l(x, t)}{\partial x} = \frac{T_m - T_0}{\operatorname{erf}(\lambda)} \cdot \frac{e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_l t}}\right)^2}}{\sqrt{\pi\kappa_l t}} \quad (3.69b)$$

$$\frac{\partial T_s(x, t)}{\partial x} = \frac{T_m - T_i}{\operatorname{erfc} \left(\lambda \sqrt{\frac{\kappa_l}{\kappa_s}} \right)} \cdot \left(-\frac{e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_s t}}\right)^2}}{\sqrt{\pi\kappa_s t}} \right). \quad (3.69c)$$

Dosadíme tedy do (3.60b)

$$-k_s \frac{T_m - T_i}{\operatorname{erfc} \left(\lambda \sqrt{\frac{\kappa_l}{\kappa_s}} \right)} \cdot \frac{e^{-\frac{\kappa_l}{\kappa_s} \lambda^2}}{\sqrt{\pi\kappa_s t}} - k_l \frac{T_m - T_0}{\operatorname{erf}(\lambda)} \cdot \frac{e^{-\lambda^2}}{\sqrt{\pi\kappa_l t}} = \rho L \frac{\lambda\sqrt{\kappa_l}}{\sqrt{t}}. \quad (3.70)$$

3.4. TUHNUTÍ V CYLINDRICKÝCH SOUŘADNICÍCH

Úpravami a dosazením $\kappa_l = \frac{k_l}{\rho c_l}$ na pravé straně rovnice lze rovnici upravit do tvaru

$$\frac{k_s \sqrt{\kappa_l}}{k_l \sqrt{\kappa_s}} \cdot \frac{(T_m - T_i) e^{-\frac{\kappa_l}{\kappa_s} \lambda^2}}{\operatorname{erfc}\left(\lambda \sqrt{\frac{\kappa_l}{\kappa_s}}\right)} + \frac{(T_m - T_0) e^{-\lambda^2}}{\operatorname{erf}(\lambda)} = -\frac{L \lambda \sqrt{\pi}}{c_l}. \quad (3.71)$$

Získali jsme další transcendentní rovnici pro parametr λ . Řešení $\lambda > 0$ hledáme zase zvolenou numerickou metodou. Jakmile toto řešení nalezneme, problém je vyřešen a pozici rozhraní $s(t)$ získáme z (3.64), rozložení teploty v kapalně fázi z (3.67) a rozložení teploty v tuhé fázi z (3.68).

Při řešení problému tuhnutí bychom postupovali analogicky.

3.4 Tuhnutí v cylindrických souřadnicích

Jako další analyticky řešitelný příklad si uvedeme problém s válcovou symetrií [7]. Uvažujme tedy nekonečný prostor s válcovou symetrií a poloměrem $r \in \langle 0, \infty \rangle$ vyplněný danou látkou nacházející se v kapalně fázi. Uprostřed prostoru je v ose symetrie $r = 0$ umístěn nekonečný liniový chladič s výkonem $P [\text{W} \cdot \text{m}^{-1}]$. Látka v prostoru má počáteční teplotu T_i větší než teplota tuhnutí T_m . V čase $t = 0$ je zapnut chladič, aby nepřetržitě odváděl teplo z látky pro $t > 0$. Tuhnutí započne v přímé blízkosti chladiče $r \rightarrow 0$ a postupuje ve směru rostoucího r .

Matematická formulace

Pro kruhovou symetrii, kde neznámou je poloměr r , máme rovnici vedení tepla ve formě [2]

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (3.72)$$

Rozložení teplot v jednotlivých fázích je tedy dáno rovnicemi

$$\frac{\partial T_s(r, t)}{\partial t} = \kappa_s \left(\frac{\partial^2 T_s(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T_s(r, t)}{\partial r} \right) \quad \text{pro } 0 < r < s(t), \quad t > 0, \quad (3.73a)$$

$$\frac{\partial T_l(r, t)}{\partial t} = \kappa_l \left(\frac{\partial^2 T_l(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T_l(r, t)}{\partial r} \right) \quad \text{pro } s(t) < r < \infty, \quad t > 0. \quad (3.73b)$$

Uvedme si také počáteční podmínku

$$T_l(r, 0) = T_i \quad \text{pro } r > 0 \quad (3.74)$$

a okrajovou podmínku

$$T_l(r \rightarrow \infty, t) \rightarrow T_i. \quad (3.75)$$

Musíme také dodat podmínky na rozhraní $r = s(t)$

$$T_s(r, t) = T_m = T_l(r, t) \quad (3.76a)$$

$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial r} - k_l \frac{\partial T_l}{\partial r} = \rho L \frac{ds(t)}{dt}. \quad (3.76b)$$

Všimněme si, že ještě není úloha dobře formulována, protože nám chybí okrajová podmínka pro $r \rightarrow 0$, kterou si nyní definujeme pomocí výkonu chladiče P . Uděláme si energetickou rovnováhu kolem chladiče pro $r \rightarrow 0$ [7]

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(2\pi r k_s \frac{\partial T_s}{\partial r} \right) = P \quad (3.77)$$

Řešení

Nejprve si vyřešíme obecnou rovnici (3.72). Předpokládejme, že existuje transformace sjednocující dvě proměnné r a t pouze do jedné proměnné $(r, t) \mapsto \xi(r, t)$. Řešení poté hledáme ve tvaru [2]

$$T(r, t) = F(\xi(r, t)), \quad (3.78)$$

kde $F(\xi(r, t))$ je neznámá funkce třídy C^2 a ξ je uvažujeme ve tvaru $\xi = \frac{r}{\sqrt{t}}$ [2]. Funkci $F(\xi)$ nyní dosadíme zpět do rovnice (3.72), k tomu si vypočteme odpovídající parciální derivace

$$\frac{\partial F}{\partial t} = F' \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{1}{2} F' \frac{r}{\sqrt{t^3}} \quad (3.79)$$

$$\frac{\partial F}{\partial r} = F' \frac{\partial \xi}{\partial r} = F' \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (3.80)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = F'' \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^2 + F' \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} = F'' \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^2 = F'' \frac{1}{t} \quad (3.81)$$

a dosazením získáme obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu

$$-F' \frac{r}{2\sqrt{t^3}} = \kappa \left(F'' \frac{1}{t} + \frac{1}{r} F' \frac{1}{\sqrt{t}} \right) \quad (3.82)$$

$$F'' \frac{1}{t} + F' \frac{1}{r\sqrt{t}} + F' \frac{r}{2\kappa\sqrt{t^3}} = 0 \quad (3.83)$$

$$F'' + F' \frac{\sqrt{t}}{r} + F' \frac{r}{2\kappa\sqrt{t}} = 0 \quad (3.84)$$

$$F'' + F' \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{2\kappa} \xi \right) = 0. \quad (3.85)$$

Substitucí

$$F'(\xi) = y(\xi) \quad (3.86)$$

si rovnici ještě zjednodušíme na obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu.

$$y' = -y \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{2\kappa} \xi \right) \quad (3.87)$$

$$\frac{y'}{y} = - \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{2\kappa} \xi \right), \quad y \neq 0 \quad (3.88)$$

3.4. TUHNUTÍ V CYLINDRICKÝCH SOUŘADNICÍCH

Rovnici zintegrujeme a upravíme

$$\ln |y| = -\ln |\xi| - \frac{1}{2\kappa} \cdot \frac{\xi^2}{2} + \ln |C_1| \quad (3.89)$$

$$\ln \frac{|y\xi|}{|C_1|} = -\frac{\xi^2}{4\kappa} \quad (3.90)$$

$$\frac{y\xi}{C_1} = e^{-\frac{\xi^2}{4\kappa}} \quad (3.91)$$

$$y = C_1 \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4\kappa}}}{\xi}, \quad C_1 \neq 0. \quad (3.92)$$

Dosadíme zpět do substituce (3.86)

$$F' = C_1 \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4\kappa}}}{\xi} \quad (3.93)$$

a vztah zintegrujeme

$$F = C_1 \int \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4\kappa}}}{\xi} d\xi. \quad (3.94)$$

Nyní využijeme substituci

$$\frac{\xi^2}{4\kappa} = s \quad (3.95)$$

$$\frac{2\xi}{4\kappa} d\xi = ds \quad (3.96)$$

$$d\xi = \frac{2\kappa}{\xi} ds \quad (3.97)$$

a dostaneme

$$F = C_1 \int \frac{e^{-s}}{\xi} \cdot \frac{2\kappa}{\xi} ds \quad (3.98)$$

$$F = C_1 \frac{1}{2} \int \frac{e^{-s}}{\frac{\xi^2}{4\kappa}} ds \quad (3.99)$$

$$F = C_1 \int \frac{e^{-s}}{s} ds. \quad (3.100)$$

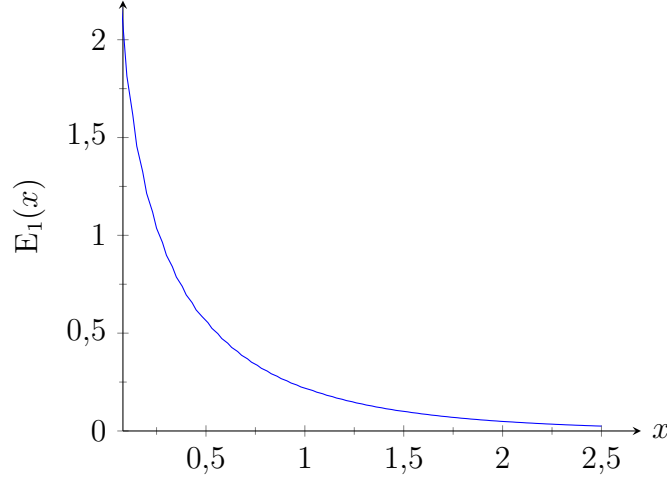
Integrál $\int \frac{e^{-s}}{s} ds$ je podle [1] tzv. *exponenciální integrál* $E_i(-s)$.

Výsledek máme tedy ve tvaru

$$F = C_1 E_i(-s) + C_2, \quad (3.101)$$

když ještě dosadíme za s a podle [1] využijeme vlastnosti funkce E_i , že

$$E_i(-x) = E_1(x), \quad (3.102)$$



Obrázek 3.3: Exponenciální integrál

dostaneme

$$F = C_1 E_1 \left(\frac{\xi^2}{4\kappa} \right) + C_2. \quad (3.103)$$

Nakonec ještě dosadíme za ξ a konečný výsledek je ve tvaru

$$F = C_1 E_1 \left(\frac{r^2}{4\kappa t} \right) + C_2, \quad C_1 \neq 0, C_2 \in \mathbb{R}. \quad (3.104)$$

Hledané řešení rovnic (3.73a) a (3.73b) budeme mít ve tvaru

$$T_s(r, t) = A + B E_1 \left(\frac{r^2}{4\kappa_s t} \right) \quad (3.105)$$

$$T_l(r, t) = C + D E_1 \left(\frac{r^2}{4\kappa_l t} \right), \quad (3.106)$$

kde A , B , C a D jsou neznámé konstanty, které musíme pomocí podmínek vyšetřit. Nejprve využijeme počáteční podmínku (3.74), kde využijeme [1] $E_1(\infty) = 0$ a $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{r^2}{4\kappa_l t} \right) = \infty$

$$T_l(r, 0) = C + D E_1(\infty) = C = T_i \quad (3.107)$$

Dále využijeme podmínky (3.77), k čemuž si nejprve spočteme potřebnou derivaci s využitím vlastnosti funkce E_1 [1]

$$\frac{d}{dx} [E_1(x)] = -\frac{e^{-x}}{x} \quad (3.108)$$

$$\frac{\partial T_s}{\partial r} = -B \frac{e^{-\frac{r^2}{4\kappa_s t}}}{\frac{r^2}{4\kappa_s t}} \cdot \frac{2r}{4\kappa t} = -B \frac{2e^{-\frac{r^2}{4\kappa_s t}}}{r} \quad (3.109)$$

3.4. TUHNUTÍ V CYLINDRICKÝCH SOUŘADNICÍCH

a dosadíme

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(2\pi r k_s (-B) \frac{e^{-\frac{r^2}{4\kappa_s t}}}{\frac{r^2}{4\kappa_s t}} \right) = P \quad (3.110)$$

$$4\pi k_s (-B) = P \quad (3.111)$$

$$B = -\frac{P}{4\pi k_s}. \quad (3.112)$$

Konstanty A a D spočteme obdobně jako v předchozím příkladu z podmínky (3.76a) na rozhraní $r = s(t)$

$$A - \frac{P}{4\pi k_s} E_1(\lambda^2) = T_m = T_i + D E_1\left(\frac{\kappa_s}{\kappa_l} \lambda^2\right), \quad (3.113)$$

kde

$$\lambda = \frac{s(t)}{2\sqrt{\kappa_s t}} \quad \text{nebo} \quad s(t) = 2\lambda\sqrt{\kappa_s t}. \quad (3.114)$$

Odtud poté

$$A = T_m + \frac{P}{4\pi k_s} E_1(\lambda^2) \quad (3.115)$$

$$D = \frac{T_m - T_i}{E_1\left(\frac{\kappa_s}{\kappa_l} \lambda^2\right)} \quad (3.116)$$

Řešení jsme našli ve tvaru

$$T_s(r, t) = T_m + \frac{P}{4\pi k_s} E_1(\lambda^2) - \frac{P}{4\pi k_s} E_1\left(\frac{r^2}{4\kappa_s t}\right) \quad (3.117)$$

$$T_l(r, t) = T_i + \frac{T_m - T_i}{E_1\left(\frac{\kappa_s}{\kappa_l} \lambda^2\right)} E_1\left(\frac{r^2}{4\kappa_l t}\right). \quad (3.118)$$

Vztah pro výpočet neznámého parametru λ si opět vyjádříme z podmínky (3.76b) na rozhraní $r = s(t)$. S využitím vztahu (3.108) si vyjádříme potřebné derivace

$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{\lambda\sqrt{\kappa_s}}{\sqrt{t}} \quad (3.119a)$$

$$\frac{\partial T_s}{\partial r} = \frac{2Pe^{-\frac{r^2}{4\kappa_s t}}}{4\pi r k_s} \quad (3.119b)$$

$$\frac{\partial T_l}{\partial r} = \frac{T_m - T_i}{E_1\left(\frac{\kappa_s}{\kappa_l} \lambda^2\right)} \cdot \frac{2e^{-\frac{r^2}{4\kappa_l t}}}{r} \quad (3.119c)$$

a do podmínky dosadíme

$$k_s \frac{2Pe^{-\frac{r^2}{4\kappa_s t}}}{4\pi r k_s} - k_l \frac{T_m - T_i}{E_1\left(\frac{\kappa_s}{\kappa_l} \lambda^2\right)} \cdot \frac{2e^{-\frac{r^2}{4\kappa_l t}}}{r} = \rho L \frac{\lambda\sqrt{\kappa_s}}{\sqrt{t}} \quad (3.120)$$

3. ANALYTICKÁ ŘEŠENÍ

a následnými úpravami a dosazením $r = s(t)$ dostaneme transcendentní rovnici ve tvaru

$$\frac{Pe^{-\lambda^2}}{4\pi} + k_l \frac{T_m - T_i}{E_1\left(\frac{\kappa_s}{\kappa_l}\lambda^2\right)} e^{-\frac{\kappa_s}{\kappa_l}\lambda^2} = \rho L \lambda^2 \kappa_s. \quad (3.121)$$

Vyřešení rovnice a dosazením do (3.114), (3.117) a (3.118) získáme řešení problému.

Analogicky s postupem pro tuhnutí by se postupovalo i v případě tání a dospělo by se k výsledným vztahům

$$T_l(r, t) = T_m - \frac{P}{4\pi k_l} \left(E_1\left(\frac{r^2}{4\kappa_l t}\right) - E_1(\lambda^2) \right) \quad (3.122)$$

$$T_s(r, t) = T_i + \frac{T_m - T_i}{E_1\left(\frac{\kappa_l}{\kappa_s}\lambda^2\right)} E_1\left(\frac{r^2}{4\kappa_s t}\right) \quad (3.123)$$

pro rozložení teplot a k transcendentní rovnici

$$\frac{Pe^{-\lambda^2}}{4\pi} + k_s \frac{T_i - T_m}{E_1\left(\frac{\kappa_l}{\kappa_s}\lambda^2\right)} e^{-\frac{\kappa_l}{\kappa_s}\lambda^2} = \rho L \lambda^2 \kappa_l. \quad (3.124)$$

4 Vytvořený program a grafická řešení

Pro vizualizaci řešení bylo využito prostředí MATLAB, ve kterém bylo vytvořeno uživatelské rozhraní, kde se zadají požadované vstupní parametry, a samotný program na výpočet a grafické řešení.

4.1 Uživatelské rozhraní

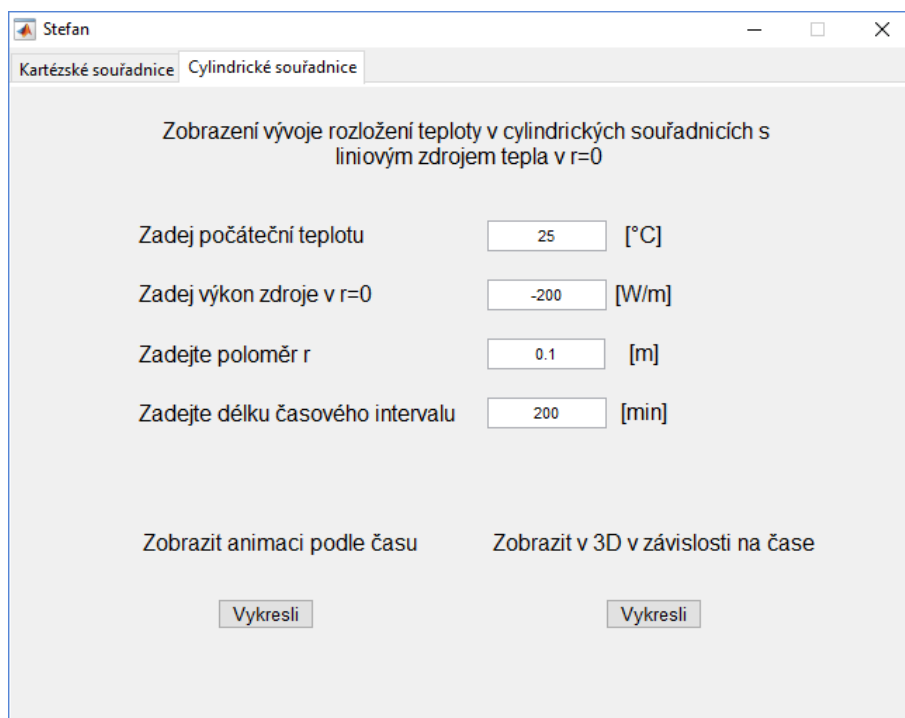
Obrázek 4.1 znázorňuje uživatelské rozhraní, kde uživatel zadá vstupní parametry a výsledek si následně může zobrazit jako animaci rozložení teploty s časem, nebo jako plochu v 3D grafu.

Obrázek 4.1: Uživatelské rozhraní pro kartézské souřadnice

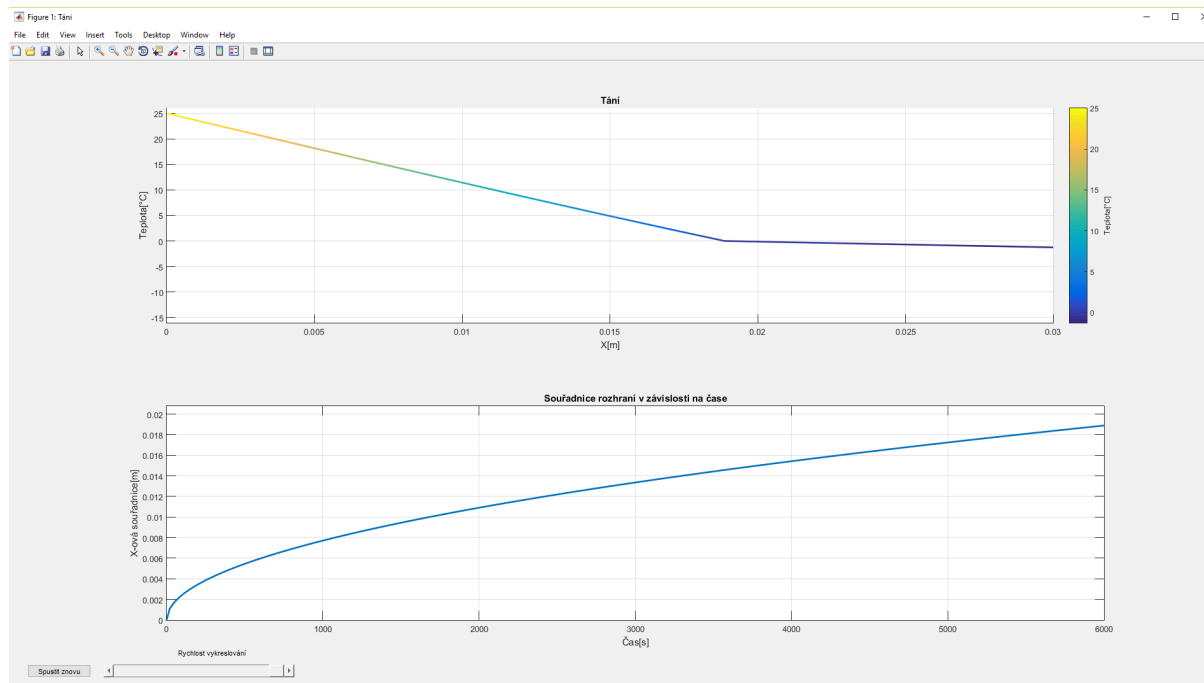
Na další záložce rozhraní je potom problém v cylindrických souřadnicích (obrázek 4.2), kde je rozdíl v okrajové podmínce $r = 0$, kde uživatel zadá výkon chladiče (záporná hodnota), nebo ohřívače (kladná hodnota).

Na obrázku 4.3 je okno, ve kterém probíhá animace. Na horním grafu je samotné rozložení teploty a na spodním je vyobrazeno jak postupuje rozhraní mezi kapalnou a tuhrou fází. V levém dolním rohu je navíc posuvník, kterým může uživatel regulovat rychlost animace a v případě dokončení animace se objeví tlačítko, kterým se může spustit znovu.

4.1. UŽIVATELSKÉ ROZHRANÍ



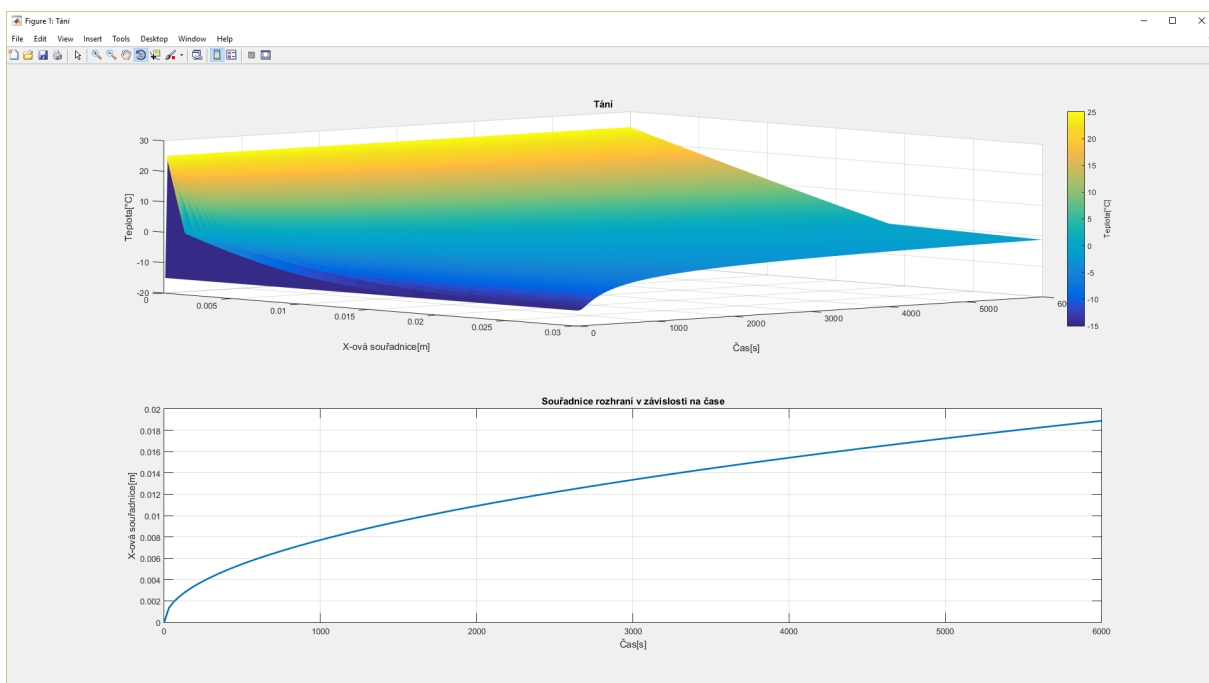
Obrázek 4.2: Uživatelské rozhraní pro cylindrické souřadnice



Obrázek 4.3: Uživatelské rozhraní při animaci

Obrázek 4.4 znázorňuje okno, ve kterém se v programu zobrazuje plocha vývoje teploty v závislosti na čase t a na souřadnici x . Na horním grafu je zobrazen vývoj teploty a na spodním je postup rozhraní mezi kapalnou a tuhou fází v závislosti na čase.

4. VYTVOŘENÝ PROGRAM A GRAFICKÁ ŘEŠENÍ



Obrázek 4.4: Okno s 3D grafem

4.2 Grafické řešení

Všechna řešení vyobrazená v následující části jsou vypočtená pro vodu s následujícími termomechanickými vlastnostmi

- Součinitel tepelné vodivosti: $k_s = 2,3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $k_l = 0,6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$,
- Měrná tepelná kapacita: $c_s = 2090 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $c_l = 4184 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$,
- Hustota: $\rho_s = \rho_l = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$,
- Latentní teplo: $L = 334000 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$,
- Teplota tání/tuhnutí: $T_m = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$.

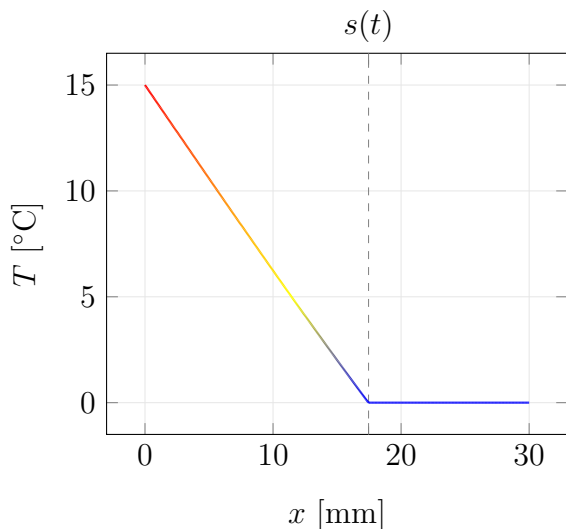
Níže uvedené obrázky nejsou přímo výstupem z vytvořeného programu, nýbrž jsou zhotoveny pomocí grafického editoru Tikz, který je doplňkem sázecího prostředí \TeX . Pro vykreslení byla využita data vyexportovaná z programu zhotoveném v prostředí MATLAB.

4.2.1 Řešení v kartézských souřadnicích

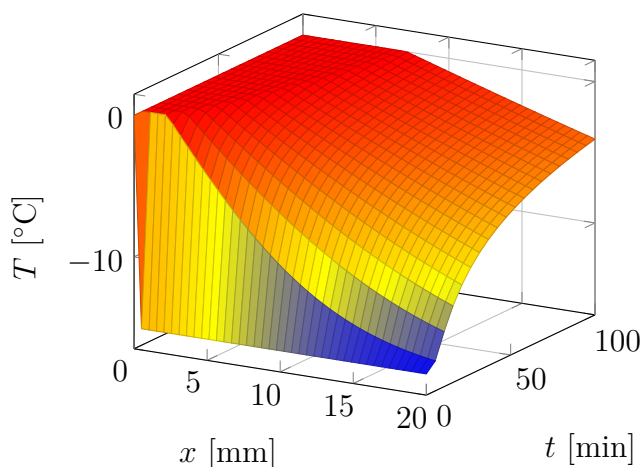
Pro každý případ nám program umožňuje dva způsoby vykreslení, ale pro názornost si ukážeme pouze jednu verzi ke každému příkladu. Obrázek 4.5 znázorňuje rozložení teploty při tání ledu o teplotě $T_m = T_i = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$, s okrajovou podmínkou $T_0 = 15 \text{ } ^\circ\text{C}$ a v čase $t = 100 \text{ min}$, $s(t) = 17,46 \text{ mm}$ vyjadřuje pozici rozhraní mezi kapalnou a tuhou fází v odpovídajícím čase. Jedná se o jednofázový problém 3.1.

Následující obrázek 4.6 vykresluje průběh tuhnutí podchlazené vody na teplotu $T_i = -15 \text{ } ^\circ\text{C}$

4.2. GRAFICKÉ ŘEŠENÍ



Obrázek 4.5: Rozložení teploty při tání ledu o teplotě T_m

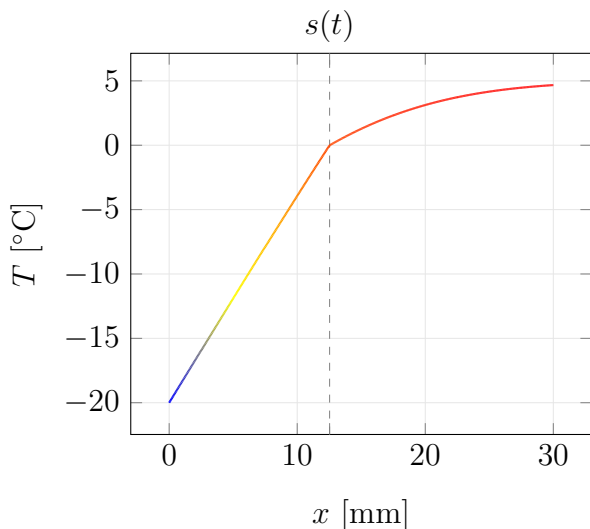


Obrázek 4.6: Tuhnutí podchlazené kapaliny

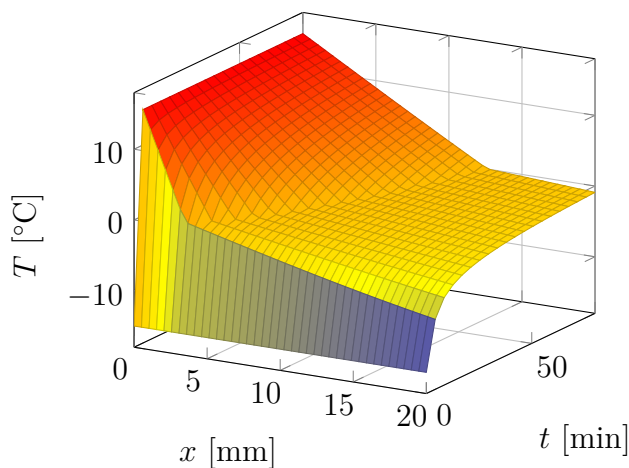
pro čas $t = \langle 0; 100 \rangle$ min, vyobrazuje tedy řešený problém 3.2.

Obrázek 4.7 zobrazuje rozložení teploty pro dvoufázový problém tuhnutí s počáteční podmínkou $T_i = 5$ °C, okrajovou podmínkou $T_0 = -20$ °C a v čase $t = 10$ min. Pozice rozhraní v daném čase je $s(t) = 12,53$ mm.

Obrázek 4.8 vykresluje průběh tání pro $t = \langle 0; 80 \rangle$ min s počáteční podmínkou $T_i = -15$ °C a okrajovou podmínkou $T_0 = 15$ °C, jedná se o příklad 3.3.



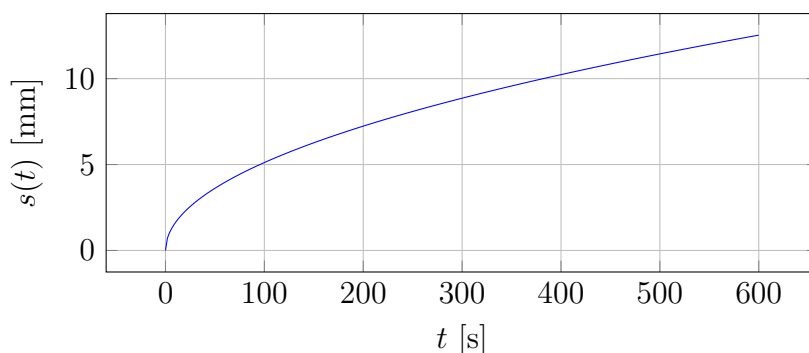
Obrázek 4.7: Rozložení teploty při tuhnutí



Obrázek 4.8: Dvoufázový případ tání

Na obrázku 4.9 je zobrazený pohyb rozhraní $s(t)$ mezi tuhou a kapalnou fází v závislosti na čase pro případ zobrazený na obrázku 4.7.

4. VYTVOŘENÝ PROGRAM A GRAFICKÁ ŘEŠENÍ



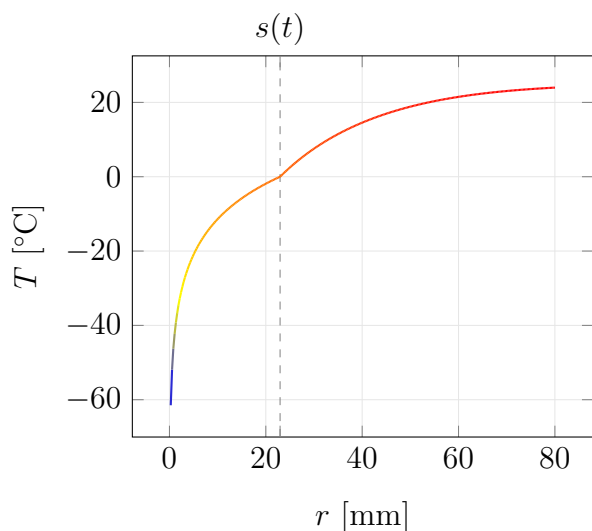
Obrázek 4.9: Pozice rozhraní $s(t)$ v čase

4.2.2 Řešení v cylindrických souřadnicích

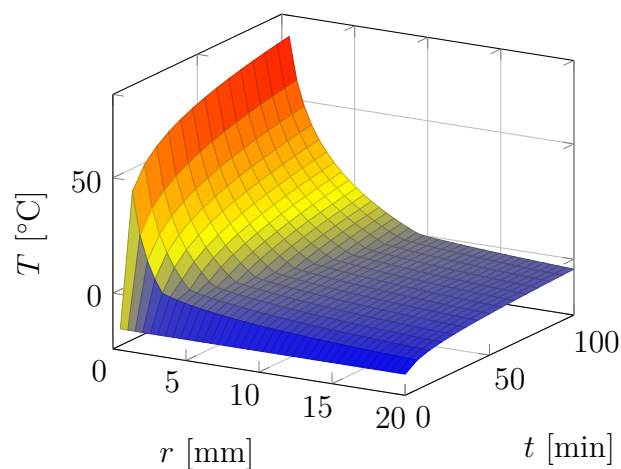
Další problém, který byl řešen, je problém s válcovou symetrií, jenž si vyřešíme graficky.

Obrázek 4.10 zobrazuje rozložení teploty při tuhnutí v čase $t = 100$ min, s okrajovou podmínkou v ose symetrie $r = 0$, kde je umístěn chladič s výkonem $P = -200 \text{ Q} \cdot \text{m}^{-1}$, a počáteční podmínkou $T_i = 25 \text{ }^\circ\text{C}$. Pozice rozhraní v daném čase je $s(t) = 22,96 \text{ mm}$. Obrázek odpovídá řešenému příkladu 3.4.

Obrázek 4.11 zobrazuje průběh tání se zdrojem tepla v $r = 0$ o výkonu $P = 100 \text{ Q} \cdot \text{m}^{-1}$ a počáteční podmínkou $T_i = -15 \text{ }^\circ\text{C}$. Tání probíhá v časovém intervalu $t = \langle 0; 100 \rangle$ min.



Obrázek 4.10: Rozložení teploty při tuhnutí v cylindrických souřadnicích

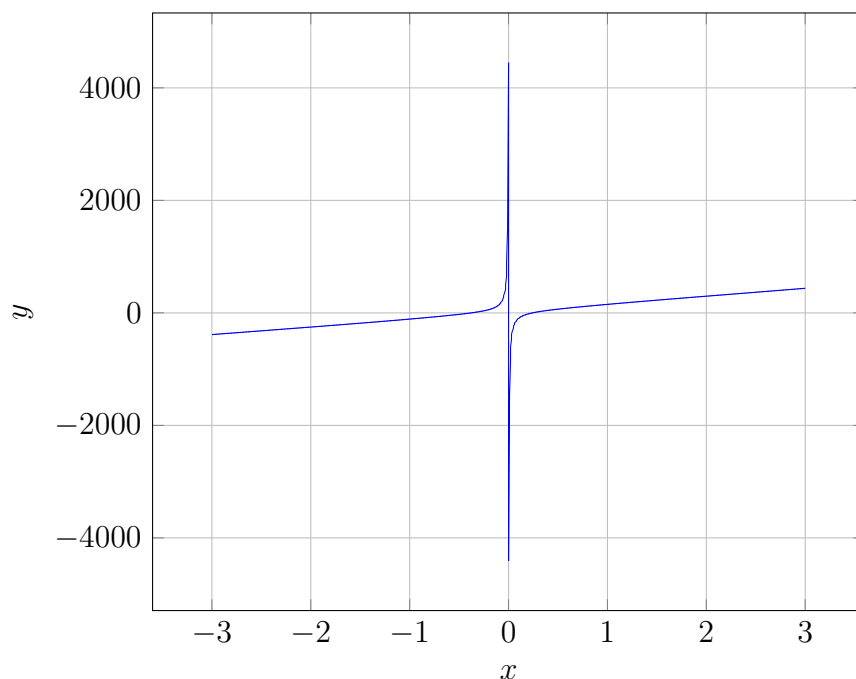


Obrázek 4.11: Tání v cylindrických souřadnicích

4.2. GRAFICKÉ ŘEŠENÍ

4.2.3 Transcendentní rovnice

V kapitole 3 byly při řešení odvozeny tzv. transcendentní rovnice, které udávají vztah pro neznámý parametr λ nezbytný pro vyřešení problému. Hledání kořenu bylo provedeno numerickou metodou, ale ukažme si jak vypadá graf rovnice (3.71), která je pro případ tání, tedy pro odpovídající obrázek 4.8. Z obrázku 4.12 je patrné, že rovnice má dva kořeny (v bodě $x = 0$ je pouze asymptota), ale předpokládám k zavedení tohoto parametru odpovídá pouze kořen $\lambda > 0$, což je ve využití numerické metodě zohledněno.



Obrázek 4.12: Graf transcendentní rovnice (3.71)

5 Závěr

Hlavním cílem této práce bylo odvození analytického řešení Stefanova problému pro různé počáteční úlohy a následná implementace výsledků ve vhodném programovacím prostředí. Řešení byla odvozena pro čtyři úlohy a to od těch jednodušších po komplexnější problémy. Pro vizualizaci výsledků bylo vybráno prostředí MATLAB, ve kterém byl vytvořen program sestávající se z uživatelského rozhraní, kde uživatel zadá počáteční a okrajové podmínky a může si vybrat způsob vykreslení výsledku. Pro vykreslení má uživatel na výběr ze dvou možností, buďto jako animaci rozložení teploty v čase, nebo jako plochu rozložení teploty v závislosti na souřadnici x a na čase.

V úvodní kapitole je čtenář seznámen se základními pojmy termomechaniky, které jsou nezbytně nutné k následující matematické formulaci problému. Dále je v této kapitole odvozena diferenciální rovnice vedení tepla pro 1D tyč a také je stručně pojednáno o základních předpokladech pro existenci řešení.

Druhá kapitola je věnována formulaci Stefanova problému a zjednodušujícím předpokladům zajišťující existenci analytického řešení problému. Poté následuje vytvoření matematického modelu.

Ve třetí kapitole jsou podrobně odvozena řešení jednotlivých počátečních úloh. Při odvozování byla využita transformace sdružující dvě nezávislé proměnné x, t pouze do jediné, čímž se problém parciálních diferenciálních rovnic zredukoval na úlohu obyčejných diferenciálních rovnic. Součástí řešení je také transcendentní rovnice, která musí být vyřešena numericky.

Poslední čtvrtá kapitola čtenáře seznamuje s programem vytvořeným v rámci této bakalářské práce a jsou uvedena názorná grafická řešení, jež byla zpracována pro vodu.

Při vytváření práce bylo využito především znalostí obyčejných a parciálních diferenciálních rovnic a největším přínosem je prohloubení znalostí při práci s MATLABem.

Seznam použitých zdrojů

- [1] ABRAMOWITZ, Milton a Irene A. STEGUN, ed. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs and mathematical tables*. New York: Dover Publications, 1965. ISBN 0486612724.
- [2] ALEXIADES, Vasilios. a Alan D. SOLOMON. *Mathematical modeling of melting and freezing processes*. Washington: Hemisphere Pub., 1993. ISBN 1560321253.
- [3] ARKAR, Ciril, Tomaž ŠUKLJE, Boris VIDRIH a Sašo MEDVED. Performance analysis of a solar air heating system with latent heat storage in a lightweight building. *Applied Thermal Engineering*. 2016, 95, p.281-287. DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2015.11.031. ISSN 13594311. Dostupné také z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1359431115012673>
- [4] CRANK, John. *Free and moving boundary problems*. New York: Oxford University Press, 1984. ISBN 0198533705.
- [5] ČERMÁK, Libor a Rudolf HLAVIČKA. *Numerické metody*. Vyd. 2. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2008. ISBN 9788021437524.
- [6] FRANČŮ, Jan. *Parciální diferenciální rovnice*. 4., dopl. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2011. ISBN 9788021443990.
- [7] HAHN, David W. a M. Necati. ÖZİŞIK. *Heat conduction*. 3. vyd. Hoboken, N.J.: Wiley, 2012.
- [8] KALČÍK, Josef, SÝKORA, Karel. *Technická termomechanika*. Praha : Academia, 1973. 536s.
- [9] PAVELEK, Milan. *Termomechanika*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2011. ISBN 9788021443006.
- [10] ŠARLER, Božidar. Stefan's work on solid-liquid phase changes. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 1995, 16(2), p.83-92. DOI: 10.1016/0955-7997(95)00047-X. ISSN 09557997. Dostupné také z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/095579979500047X>
- [11] ZÁLEŠÁK, Martin. *Počítačové modelování úloh přenosu tepla s fázovými přeměnami v MATLABu*. [Bakalářská práce.] BRNO: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav Matematiky, 2016. 60 s. Vedoucí práce Ing. Lubomír Klimeš, Ph.D.

Seznam použitých veličin, symbolů a zkratek

Symbol	Rozměr	Veličina
c	$[\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}]$	měrná tepelná kapacita
ΔE	$[\text{J}]$	změna vnitřní energie
e	$[-]$	Eulerovo číslo
e^*	$[\text{J} \cdot \text{m}^{-1}]$	hustota vnitřní energie
f	$[\text{W} \cdot \text{m}^{-1}]$	hustota vnitřních zdrojů
k	$[\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}]$	součinitel tepelné vodivosti
k^*	$[\text{W} \cdot \text{m} \cdot \text{K}^{-1}]$	součinitel vedení tepla průřezu
L	$[\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}]$	latentní teplo
P	$[\text{W} \cdot \text{m}^{-1}]$	výkon na jednotku délky
Q_a, Q_b, Q_f	$[\text{J}]$	teplo
\dot{Q}	$[\text{W}]$	tepelný tok
\dot{q}	$[\text{W} \cdot \text{m}^{-2}]$	měrný tepelný tok
\dot{q}^*	$[\text{W}]$	tepelný tok pro jednu dimenzi
r	$[\text{m}]$	souřadnice cylindrického souřadného systému
s	$[\text{m}]$	souřadnice rozhraní mezi tuhou a kapalnou fází
t	$[\text{s}]$	čas
T	$[\text{K}, ^\circ\text{C}]$	teplota
T_l	$[\text{K}, ^\circ\text{C}]$	teplota kapalné fáze
T_m	$[\text{K}, ^\circ\text{C}]$	teplota tání/tuhnutí
T_s	$[\text{K}, ^\circ\text{C}]$	teplota tuhé fáze
x	$[\text{m}]$	souřadnice kartézského souřadného systému
ρ	$[\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]$	hustota
ρ^*	$[\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}]$	délková hustota
κ	$[\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}]$	součinitel teplotní vodivosti